 5/12

Πρόταση

(E,ρ) ολικά φραγμ. $\Leftrightarrow$ Τυχούσα ακολουθία εν E έχει βασική υπακολουθία

Ορισμός

Ένας μ.χ. έχει την ιδιότητα Bolzano-Weirstrass (IBW) $\Leftrightarrow$ τυχούσα ακολουθία του E έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.
Τότε ο μ.χ. λέγεται και ακολουθιακά συμπαγής

Πρόταση

Ένας μ.χ. (E,ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής αν και μόνο αν είναι πλήρης κ ολικά φραγμένος.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) • Έστω το (E,ρ) είναι ακολ. συμπαγής. Έστω, $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική ακολ. εν E. Τότε η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ θα έχει συγκλίνουσα υπακολ. την $(a_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$
Δηλ. $\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_{k_\nu} = L\in E$. Άρα $\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = L$. Άρα (E,ρ) πλήρης

• Έστω δεν είναι ολικά φραγμένος ο (E,ρ). Άρα υπάρχει $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν E μη έχουσα βασική υπακολουθία. ΑΤΟΠΟ

($\Leftarrow$) Έστω (E,ρ) πλήρης κ ολικά φραγμ. Θ.δ.ο. (E,ρ) ακολ. συμπαγής δηλ. έχει IBW. Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τυχούσα ακολ. εν $E \xRightarrow{E \text{ ολικά φραγμ.}}$
Η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ έχει βασική υπακολουθία την $(a_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}} \xRightarrow{E \text{ πλήρης}} \exists \lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_{k_\nu} = L\in E$

§ Συμπαγής μ.χ. (ορισμός)

Ένας μ.χ. λέγεται συμπαγής $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Τυχούσα ανοιχτή κάλυψη του } E \text{ έχει} \\ \text{πεπερασμένη υποκάλυψη}\end{array}\right\}$

$A_i, i\in I$ κάλυψη του $E \Leftrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$

$A_i, i\in J$ υποκάλυψη της $A_i, i\in I \Leftrightarrow A_i, i\in J$ κάλυψη κ $\{A_i, i\in J\}\subseteq\{A_i, i\in I\}$

Πρόταση

Κάθε συμπαγής μ.χ. είναι κ ολικά φραγμένος, άρα και φραγμένος μ.χ.

Απόδειξη

Έστω E συμπαγής. Τότε επειδή για τυχόν $\varepsilon>0$, $E=\bigcup\limits_{x\in E} B(x,\varepsilon)$, ο E έχει την ανοιχτή κάλυψη $B(x,\varepsilon)$, $x\in E$. Επειδή, E συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη της $B(x,\varepsilon)$, $x\in E$. Δηλ. $E=\bigcup\limits_{i=1}^{k} B(x_i,\varepsilon)$.
Άρα E ολικά φραγμένος.

ΛΗΜΜΑ (Lebesgue)

Έστω (E,ρ) ακολουθιακά συμπαγής μ.χ. κ $A_i, i\in I$ μια ανοιχτή κάλυψη του E. Τότε $(\exists \varepsilon>0)(\forall x\in E)(\exists i\in I): B(x,\varepsilon)\subseteq A_i$

Πρόταση

(E,ρ) συμπαγής $\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$ (E,ρ) πλήρης κ ολικά φραγμένος $\overset{(2)}{\Longleftrightarrow}$ (E,ρ) ακολουθ. συμπαγής

Απόδειξη του (1) (η (2) έχει αποδειχτεί στην προηγ. σελίδα)

($\Longrightarrow$) Έστω (E,ρ) συμπαγής κ όχι ακολουθ. συμπαγής. Άρα υπάρχει $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν E που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολ. στον E. Δηλ. κάθε x στο E δεν μπορεί να είναι σ.σ. της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$

(Υπενθύμιση: x σ.σ. της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow (\forall U(x)): a_\nu\in U(x)$ για άπειρο πλήθος $\nu\in\mathbb{N}$)

Άρα $(\forall x\in E)(\exists \underset{\text{ανοιχτό}}{U(x)}): a_\nu\in U(x)$ για πεπερασμένα $\nu\in\mathbb{N}$

$E=\bigcup\limits_{x\in E}U(x)$ ανοιχτή κάλυψη του $E \xrightarrow{E\ \text{συμπαγής}} E=U(x_1)\cup\ldots\cup U(x_k)$ ΑΤΟΠΟ

($\Longleftarrow$) Έστω (E,ρ) ακολουθιακά συμπαγής. Έστω $A_i, i\in I$ ανοιχτή κάλυψη του E, δηλ. $\bigcup\limits_{i\in I}A_i=E$. Τότε από το λήμμα Lebesgue, $(\exists\varepsilon>0)(\forall x\in E)(\exists i\in I): B(x,\varepsilon)\subseteq A_i$

Επειδή ο E, ως ακολουθ. συμπαγής είναι ολικά φραγμένος,

$E=\bigcup\limits_{i=1}^{k}B(x_i,\varepsilon)$, ($\varepsilon$: το ε του Lebesgue) Αλλά

$B(x_1,\varepsilon)\subseteq A_{i_1},\ldots,B(x_k,\varepsilon)\subseteq A_{i_k} \Longrightarrow E=\bigcup\limits_{i=1}^{k}B(x_i,\varepsilon)\subseteq A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k}$

Τελικά $E=A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k}$